MATEMATICI APLICATE
ÎN
ECONOMIE

RADU DESPA
CĂTĂLINA VIŞAN
MARIA BURAC
MARILENA AURA DIN
CRISTINA COCULESCU
OVIDIU SOLOMON
ADAM ALTĂR SAMUEL
CARMEN PRICINĂ

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

Editura UNIVERSITARĂ
Bucureşti, 2012

Redactor: Gheorghe Iovan
Tehnoredactor: Ameluța Vișan
Coperta: Angelica Mălăescu

Editură recunoscută de Consiliul Național al Cercetării Științifice (C.N.C.S.)

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematici aplicate în economie / coord.: Radu Despa ;
Cătălina Vișan, Marilena Aura Din, Cristina Copulescu, ... –
București : Editura Universitară, 2012
Bibliogr.
ISBN 978-606-591-539-8

I. Despa, Radu (coord.)
II. Vișan, Cătălina
III. Din, Marilena Aura
IV. Copulescu, Cristina

51:33

DOI: (Digital Object Identifier): 10.5682/9786065915398

Editura Universitară
Director: Vasile Muscalu
B-dul. N. Bălcescu nr. 27-33, Sector 1, București
Tel.: 021 – 315.32.47 / 319.67.27
www.editurauniversitara.ro
e-mail: redactia@editurauniversitara.ro

Distribuție: tel.: 021-315.32.47 /319.67.27 / 0744 EDITOR / 07217 CARTE
comenzi@editurauniversitara.ro
O.P. 15, C.P. 35, București
www.editurauniversitara.ro

P R E F A Ţ Ă

Este bine cunoscut faptul că etapa actuală de dezvoltare se caracterizează printr-o complexitate şi diversitate a fenomenelor economice implicând abordarea lor pe bază ştiinţifică.

Această abordare nu mai este posibilă fără a recurge la folosirea unui aparat matematic auxiliar adecvat. Luarea unei decizii economice presupune antrenarea unor resurse materiale şi umane importante neputând fi eficientă şi realistă decât dacă se bazează pe un instrument matematic adecvat şi pe o analiză temeinică a fenomenului supus modelării.

O modelare economică riguroasă exclude cu desăvârşire o abordare empirică, aduce un plus de informaţie şi conferă cercetării un grad sporit de încredere.

Prezentul curs cuprinde materia predată la disciplina „Matematici aplicate în economie" în anul I al facultăţilor economice din cadrul Universităţii Româno-Americane: Management-Marketing, Relaţii Comerciale şi Financiar Bancare Interne şi Internaţionale, Economia Turismului Intern şi Internaţional, Studii ale Integrării Economice Europene.

Noţiunile prezentate în manual înarmează studentul economist cu instrumentul matematic necesar abordării problematicii ce ajută la modelarea fenomenelor economice cu caracter determinist sau aleator.

Manualul urmăreşte îndeaproape programa analitică şi vine în sprijinul studenţilor cu un mare număr de probleme atât rezolvate cât şi propuse pentru rezolvare. De asemenea, precizăm că această carte se adresează tuturor studenţilor economişti, precum şi tuturor specialiştilor din diverse sectoare ale economiei şi constituie un auxiliar preţios în activitatea şi practica lor economică.

Autorii

CAPITOLUL I

MODELARE ȘI OPTIMIZARE LINIARĂ

§ 1. Elemente de algebră liniară

1. Spații liniare.

Fie $\mathcal{L}$ o mulțime nevidă și $\mathcal{K}$ un corp. Pe $\mathcal{L}$ se definește o lege de compoziție internă notată aditiv:

$$+ : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L},\ (a,b)| \to a+b$$

și o lege de compoziție externă notată multiplicativ :

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}\ (\alpha, a)| \to \alpha a\ ,\ \alpha \in \mathcal{K}$$

Definiție: Mulțimea $\mathcal{L}$ este un *spațiu liniar* sau *vectorial* peste corpul $\mathcal{K}$ dacă sunt satisfăcute condițiile (axiomele spațiului liniar):

1° $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(\forall)a,b,c, \in \mathcal{L}$

2° $0 \in \mathcal{L}$ astfel încât $a+0=0+a=a$ $(\forall)a \in \mathcal{L}$

3° $-a \in \mathcal{L}$ astfel încât $a+(-a)=(-a)+a=0$ $(\forall)a \in \mathcal{L}$

4° $a+b=b+a$, $(\forall)a,b \in \mathcal{L}$

5° $1 \cdot a = a$, $(\forall)a \in \mathcal{L}$

6° $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$, $(\forall)\alpha,\beta \in \mathcal{K}$, $(\forall)a \in \mathcal{L}$

7° $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$, $(\forall)\alpha \in \mathcal{K}$ și $(\forall)a \in \mathcal{L}$

8° $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$, $(\forall)\alpha,\beta \in K$ și $(\forall)a \in \mathcal{L}$

Vom nota spațiul liniar cu dubletul $(\mathcal{L}, \mathcal{K})$

Observații:

a) Condițiile 1° - 8° se mai numesc axiomele spațiului liniar $\mathcal{L}$;

b) Am notat cu 1 elementul unitate al corpului $\mathcal{K}$;

c) Dacă avem $\mathcal{K} = \mathcal{R}$,$(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ se numește spațiu liniar real

Dacă $\mathcal{K} = \mathcal{C}$, $(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ se numește spațiu liniar complex

Elementele *a, b, c,...*$\in \mathcal{K}$ se numesc *vectori* iar elementele α, β ,...$\in \mathcal{K}$ se numesc *scalari.*

2. Spațiul liniar R^n. Fie $n>1$ un număr natural și fie R^n mulțimea tuturor sistemelor ordonate de *n* numere reale de forma

$a=(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)$, $\alpha_i \in R$ notată

$$R^n = \overbrace{R \times R \times ... R}^{n\ ori} = \{a=(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)/\alpha_i \in R, i=1,2,...n\}$$

Dacă $\alpha \in R$ şi $a,b \in R^n$, $a=(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)$; $b=(\beta_1,\beta_2,...\beta_n)$
atunci definim două operații: una internă

$$a+b \overset{def}{=} (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...\alpha_n+\beta_n) \text{ şi alta externă}$$

$$\alpha a \overset{def}{=} (\alpha\alpha_1,\alpha\alpha_2,...\alpha\alpha_n)$$

În R^n remarcăm prezența elementelor:

$0=(0,0,...0)$ *elementul neutru* (vectorul nul în R^n) şi

$-a=(-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n)$ numit *opusul* lui a

Se arată că cele două operații satisfac cele opt condiții (proprietăți) care definesc stațiul liniar precum şi proprietățile 1° - 3°. Rezultă că R^n este un spațiu liniar.

Elementele lui R^n astfel definit se numesc vectori linie *n- dimensionali,* elementele lui R se numesc de asemenea scalari iar R^n se numeşte spațiul *real* de dimensiune finită n, sau spațiul vectorilor n-dimensionali peste corpul de scalari R. Dacă $a \in R^n$, $a=(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)$ atunci α_i se numeşte componentă sau coordonată de rang i a lui a $(1 \le i \le n)$

Orice vector $a \in R^n$ (de dimensiunea n) are n componente.

În R^n se defineşte egalitatea a două elemente şi anume dacă $a=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ şi $b=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ atunci

$$a=b \Leftrightarrow \alpha_i=\beta_i \ (\forall)i=1,2,...n$$

Deseori este avantajos să considerăm vectorii din R^n sub formă de vectori coloană

$$a^t=(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)^t=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \quad \alpha_i \in R \ \ i=1,2,...n$$

În acest caz R^n se va numi spațiul *vectorilor coloană* n-dimensionali.

Exemple: Fie în R^3 vectorii liniari $a=(2,-1,0)$; $b=(1,2,-3)$ şi scalarul $\alpha=2$. Avem:

$$a+b=(2,-1,0)+(1,2,-3)=(2+1,-1+2,0+(-3))=(3,1,-3)$$

$2a = 2(2,-1,0) = (2 \cdot 2, 2(-1), 2 \cdot 0) = (4,-2,0)$

$a - b == a + (-1)b = (2,-1,0) + -1(1,2,-3) = (2,-1,0) + (-1,-2,3)$

$= (1,-3,-3)$

3. Sisteme de vectori în R^n. Dependența și independența liniară. Bază în R^n.

Definiție: Mulțimea $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ de vectori cu $a_i \in R^n \quad 1 \le i \le m$, *m* fixat se numește *sistem finit* de *m* vectori din spațiul R^n și-l notăm cu *S*.

Definiție: Orice submulțime nevidă S' a lui $S(S' \subset S)$ se numește *subsistem* al lui *S*.

Definiție: Orice sistem de vectori S'' care conține ca subsistem pe *S*, $(S'' \supset S)$ se numește *suprasistem* al sistemului *S*.

Definție: Fie $a_1, a_2, \ldots a_n \in R^n$ și $a \in R^n$. Dacă

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ cu $\lambda_i \in R,\ 1 \le i \le m$ spunem că *a* se exprimă ca o *combinație liniară* a vectorilor $a_1, a_2, \ldots a_m$

Definiție: Un sistem finit de vectori $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ din R^n se numește *liniar dependent* dacă există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m \in R$ nu toți nuli astfel încât $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$.

Definiție: Sistemul finit de vectori $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ din R^n se numește *liniar independent* dacă și numai dacă relația

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$ implică $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, unica soluție.

Exemple:

1°. Vectorii $a_1 = (1,2,-1)$; $a_2 = (2,-1,1)$; $a_3 = (-1,3,-2)$ sunt liniar dependenți deoarece există scalarii nenuli $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$ astfel încât $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ adică $a_1 - a_2 - a_3 = 0$.

2°. Vectorii $a_1 = (2,1,1)$; $a_2 = (1,-1,0)$; $a_3 = (3,0,2)$ sunt liniari independenți deoarece relația $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ nu are loc decât dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$;

Într-adevăr: $\lambda_1(2,1,1) + \lambda_2(1,-1,0) + \lambda_3(3,0,2) = 0 = (0,0,0)$ care conduce la sistemul omogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

a cărui soluție este soluția nulă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

În definiția dată lui R^n am afirmat că acesta este spațiul real de *dimensiune n.* Vom lega acum noțiunea de dimensiune a spațiului R^n cu noțiunile de independență liniară a vectorilor prin următoarea propoziție pe care o dăm fără demonstrație.

Propoziție: În R^n numărul maxim de vectori liniar independenți este egal cu n adică cu dimensiunea spațiului.

Prin urmare în R^n nu pot exista sisteme de vectori liniar independenți care să conțină un număr de vectori mai mare ca n-dimensiunea spațiului. (orice sistem de $n+p$ vectori $p \geq 1, p \in N$ în R^n este liniar dependent).

Bază în R^n.

Definiție: Orice sistem de n vectori $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ liniar independenți din R^n se numește *bază* a spațiului R^n.

Rezultă că orice bază a spațiului R^n conține exact n vectori.(numărul maxim de vectori liniar independenți în R^n = numărul vectorilor oricărei baze = dimensiunea spațiului $R^n = n$). Notăm cu $B = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$. o bază din R^n

Exemple:

Fie în R^n sistemul de vectori $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$

$e_1 = (1,0,\dots 0), e_2 = (0,1,\dots .0), \dots e_n = (0,0,\dots 1)$ Să arătăm că acest sistem formează o bază în R^n. Va trebui să demonstrăm independența sistemului. Într-adevăr, din

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ rezultă

$\lambda_1(1,0,\dots 0) + \lambda_2(0,1,\dots 0) + \dots \lambda_n(0,0,\dots 1) = (0,0,\dots 0)$

$(\lambda_1,0,\dots 0) + (0,\lambda_2,\dots 0) + \dots + (0,0,\dots \lambda_n) = (0,0,\dots 0)$

adică $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Deci sistemul este liniar independent și formează o bază în R^n. Vectorii $e_1, e_2, \dots e_n$ se numesc vectori *unitari* ai spațiului R^n, iar baza $B = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ se numește *baza unitară* a spațiului R^n. Matricea formată cu componentele vectorilor unitari este *matricea unitate de ordinul n:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema bazei Fiind dată o bază în spațiul R^n, orice vector $a \in R^n$ se poate exprima în mod unic ca o combinație liniară a vectorilor bazei.

Demonstrație: Fie o bază $B = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ a spațiului R^n și un vector $a \in R^n$. Vectorii $a, a_1, a_2, \dots a_n$ sunt evident liniar dependenți, deci putem scrie: $ka + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0$ unde nu toți k_i sunt nuli. Numărul k este diferit de zero, deoarece în caz contrar din relația precedentă ar rezulta că $a_1, a_2, \dots a_n$ sunt liniar dependenți (absurd, formează bază)

Deducem prin urmare:

$a = -\frac{k_1}{k} a_1 - \frac{k_2}{k} a_2 - \dots - \frac{k_n}{k} a_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ adică orice vector $a \in R^n$ se exprimă ca o combinație liniară a vectorilor bazei. Să demonstrăm unicitatea. Presupunem că ar exista două exprimări lui a în baza $a_1, a_2, \dots a_n$. Fie :

$$\begin{aligned} a &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \\ a &= \lambda_1' a_1 + \lambda_2' a_2 + \dots + \lambda_n' a_n \end{aligned} \quad (*)$$

Scăzându-le obținem:

$(\lambda_1 - \lambda_1')a_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')a_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_n')a_n = 0$ dar din cauza independenței vectorilor $a_1, a_2, \dots a_n$ rezultă $\lambda_i - \lambda_i' = 0, 1 \le i \le n$ deci $\lambda_i = \lambda_i'$ $1 \le i \le n$ și exprimarea (*) a lui a este unică.

Dacă $a \in B$ fie $a = a_i$, $i = \overline{1,n}$ Atunci B fiind bază, a se poate scrie:

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_n a_n$

unde $\lambda_j = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad j = i \\ 0 & \text{dacă} \quad j \ne i \end{cases}$ unicitatea scalarilor λ_i fiind evidentă.

Am văzut deci că într-o bază dată $B = \{a_1, a_2, \dots a_n\} \subset R^n$ orice vector $a \in R^n$ se exprimă prin combinația liniară a vectorilor bazei:

(1) $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in R$

Scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ din (1) se numesc coordonatele (componentele) vectorului a în baza B.

Fie $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$; $b = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$

$a, b \in R^n, \alpha_i, \beta_i \in R, i = 1,2,...n$ fiind coordonatele vectorilor a și b în baza unitară. Fie $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ și $\mu_1, \mu_2, ...\mu_n$ coordonatele vectorilor a, respectiv b în baza B formată cu vectorii $a_1, a_2, ...a_n$. Avem:

$$a + b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n + \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + ... + \mu_n a_n =$$
$$= (\lambda_1 + \mu_1)a_1 + (\lambda_2 + \mu_2)a_2 + ... + (\lambda_n + \mu_n)a_n$$

relație care exprimă că vectorul a+b are în baza B coordonatele

$$\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, ..., \lambda_n + \mu_n$$

De asemenea, vectorul λa se va scrie

$$\lambda a = \lambda(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n) = \lambda\lambda_1 a_1 + \lambda\lambda_2 a_2 + ... + \lambda\lambda_n a_n$$

relație care exprimă vectorul λa în baza $a_1, a_2, ...a_n$ și din care rezultă că coordonatele lui λa în această bază sunt $\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, ...\lambda\lambda_n$.

În consecință deducem că și într-o bază oarecare (nu numai în baza unitară) la adunarea vectorilor coordonatele lor se adună iar la înmulțirea cu un scalar se înmulțesc coordonatele vectorului în acea bază cu scalarul. Evident că în orice bază coordonatele vectorului nul sunt egale cu zero.

Obs. Fie în R^n vectorul $a = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ și fie $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ baza unitară a spațiului. Suntem acum în măsură să facem precizarea:

numerele $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ sunt coordonatele vectorului a în baza unitară a spațiului . Într-adevăr avem:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n =$$
$$= \lambda_1(1,0,...0) + \lambda_2(0,1,0...0) + ... + \lambda_n(0,0,...1) =$$
$$= (\lambda_1, 0, ...0) + (0, \lambda_2, 0...0) + ...(0,0,...\lambda_n) =$$
$$= (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) \Rightarrow \lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, ...\lambda_n = \alpha_n$$

De exemplu pentru vectorul $a = (2,3,5) \in R^3$ numerele 2,3,5 sunt coordonatele lui, în baza unitară $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$ a lui R^3 și în această bază a se va scrie:

$$a = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3$$

Cum se exprimă a într-o bază oarecare vom arăta în continuare.

Exemplu: Se consideră în R^3 vectorii dați în baza unitară a spațiului:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ și } a = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1° Să se arate că vectorii a_1, a_2, a_3 formează o bază în R^3;

2°Aflați coordonatele vectorului a în această bază.

Soluție: Într-un spațiu de dimensiune n, oricare n vectori liniar independenți formează o bază. Vectorii a_1, a_2, a_3 sunt liniar independenți deoarece

$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

Într-adevăr:

$$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} k_2+k_3=0\\ k_1+k_3=0\Rightarrow\\ k_1+k_2=0\end{cases}$$

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Rezultă că a_1, a_2, a_3 formează o bază

Conform teoremei bazei, a se poate exprima că o combinație liniară a vectorilor bazei și anume

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ (*)

scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fiind coordonatele vectorului a în baza dată,iar (*) exprimarea lui în această bază.

Din (*) deducem sistemul:

$$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1+\lambda_3=6\\ \lambda_1+\lambda_2=4\end{cases}$$

Sistemul este compatibil unic determinat deoarece r(A)=3;

Acest sistem se rezolvă fie pe cale elementară și se obține $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$ fie pe cale matricială. Notând cu λ vectorul coloană al necunoscutelor, sistemul se scrie:

$$A\cdot\lambda=a \Rightarrow \lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot a \text{ unde } A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix};\ a=\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$$

Avem deci:

$$\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot a=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$$

Rezultă $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$ și deci

$a = 4a_1 + 0a_2 + 2a_3$ exprimat în baza a_1, a_2, a_3

4. Stabilirea naturii unui sistem finit de vectori în R^n.

Să considerăm în R^n următorii m vectori coloană dați prin coordonatele lor în baza unitară a spațiului:

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}; \ \dots \ a_m = \begin{pmatrix} \alpha_{1m} \\ \alpha_{2m} \\ \vdots \\ \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Să arătăm în ce condiții are loc relația

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0, \ \lambda_i \in R \quad 1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{m} \quad (*)$

Avem:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} \alpha_{1m} \\ \alpha_{2m} \\ \vdots \\ \alpha_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

din care se deduce sistemul liniar omogen în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \dots + \alpha_{1m}\lambda_m = 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \dots + \alpha_{2m}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \dots + \alpha_{nm}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

cu matricea $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$ formată cu vectorii coloană considerați.

Sistemul omogen admite numai soluția nulă $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ dacă $rang(A) = m$ și admite și alte soluții afară de soluția nulă dacă $rang(A) < m$.
Deci dacă $rang(A) = m$ vectorii sunt liniar independenți. Dacă $rang(A) < m$ vectorii sunt liniar dependenți.

Altfel spus: Dacă $m > n$ (numărul vectorilor mai mare ca dimensiunea spațiului) vectorii sunt liniar dependenți.

Dacă $m \leq n$ atunci vectorii sunt liniar dependenți dacă $rang(A) < m$ și liniar independenți dacă $rang(A) = m$.

Rezultă că o condiție necesară și suficientă ca un sistem de vectori din R^n să fie liniar independent este ca rangul matricii formate cu componentele vectorilor să fie egal cu numărul vectorilor. În caz contrar sistemul de vectori este liniar dependent .

Prin urmare pentru a afla natura unui sistem de *m* vectori în R^n procedăm astfel:

- scriem matricea *A* având drept coloane vectorii dați;
- calculăm rangul *r* al matricii *A*;
- decidem natura sistemului de vectori și anume:
  a) dacă $r = m$ sistemul de vectori este liniar independent;
  b) dacă $r < m$ sistemul de vectori este liniar dependent.

Drept consecințe ale regulei precedente deducem:

1. Dacă *S* este un sistem de vectori liniar independent și S' un subsistem al lui *S* atunci S' este liniar independent;
2. Dacă *S* este un sistem liniar dependent și S'' este un suprasistem al lui *S* $(S \subset S'')$, atunci și S'' este liniar dependent;
3. Orice sistem care conține vectorul nul *O* este liniar dependent;
4. Numărul maxim de vectori liniar independenți în R^n este egal cu *n*.

Exemple:

Aflați natura sistemelor de vectori

a) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Soluție:

a) Matricea componentelor vectorilor a_1, a_2, a_3

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ are rangul 2. Cum $rang(A)=2<3$ rezultă că vectorii sunt liniar dependenți;

b) Rangul matricii A este în acest caz

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ pentru care se găsește că $rang(A)=3$ egal cu numărul vectorilor deci sunt liniar independenți;

c) Rangul matricii

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 4\\ -1 & -2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$$ este egal cu 3 < 4 deci vectorii sunt liniar dependenți.

2. Determinați $m\in R$ astfel ca sistemul de vectori

$$a_1=\begin{pmatrix}m\\ 0\\ 1\end{pmatrix};\ a_2=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix};\ a_3=\begin{pmatrix}1\\ m\\ -1\end{pmatrix}$$

să fie liniar independent.

Soluție: Trebuie ca rangul matricii

$$A=\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 0 & 2 & m\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$ să fie egal cu 3 ceea ce revine la faptul că

$\det A\neq 0$ adică $|A|=\begin{vmatrix}m & 0 & 1\\ 0 & 2 & m\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=m^2-2m-2\neq 0$

Cum $m^2-2m-2=0$ admite numai soluții complexe, rezultă că $(\forall)m\in R$ $|A|\neq 0$ și deci vectorii sunt liniar independenți pentru orice $m\in R$.

3. Fie a,b,c vectori liniar independenți în R^4. Cum sunt vectorii $a+b$, $a-b, a-2b+c$?

Soluție: Răspunsul la întrebare constă în a stabili în ce condiții are loc relația:

$\lambda_1(a+b)+\lambda_2(a-b)+\lambda_3(a-2b+c)=0$

sau

$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)a+(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)b+\lambda_3 c=(0,0,0)$

Prin ipoteză însă vectorii a,b,c sunt liniar independenţi şi din relaţia precedentă rezultă:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

de unde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ şi răspunsul este că vectorii sunt liniar independenţi.

4. Ce condiţii trebuie să îndeplinească numerele α, β, γ astfel ca vectorii:

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}$ să fie liniar dependenţi în R^3

Soluţie:

Trebuie ca rangul matricii:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}$ să fie mai mic ca 3 ceea ce revine la egalitatea cu zero a determinantului

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$, determinantul fiind de tip Vandermonde.

Din condiţia $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) = 0$ rezultă $\alpha = \beta$ sau $\gamma = \beta$ sau $\alpha = \gamma$ adică numerele α, β, γ să fie egale două câte două.

5.Metoda eliminării complete (Gauss-Jordan) de rezolvare a unui sistem de ecuaţii liniare.

Să considerăm sistemul de n ecuaţii liniare cu n necunoscute:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

a cărei formă matricială este

$$AX = b \qquad (2)$$

unde:

$$A = (a_{ij}) \;\; i, j = 1,2,...n, \;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \;\; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dacă A este nesingulară adică $|A| \neq 0$ atunci sistemul are o soluție unică reprezentată de vectorul X dat de relația:

$$X = A^{-1}b \qquad (3)$$

Există o schemă de calcul simplă care poate fi aplicată oricărui sistem cu $|A| \neq 0$ pentru obținerea soluției și (sau) pentru obținerea matricii inverse A^{-1}. Această metodă se numește *metoda eliminării complete Gauss-Jordan* și constă în aplicarea unor transformări efectuate în n iterații (pași) echivalente cu înmulțirea ambilor membrii ai ecuației (2) cu A^{-1}. În caz de nevoie comcomitent poate fi obținută și matricea inversă A^{-1}. Pentru claritate expunem această metodă pe un exemplu. Fie sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} 3x_1 & + x_2 & & = 6 \\ 4x_1 & + x_2 & + x_3 & = 9 \Rightarrow \\ 5x_1 & + 2x_2 & + x_3 & = 11 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \;\; b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Se verifică ușor că $|A| \neq 0$ și matricial, sistemul de mai sus se scrie:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Punând

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

sistemul se scrie

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b \qquad (4)$$

Deoarece matricea A este nesingulară, sistemul de vectori a_1, a_2, a_3 este liniar independent și prin urmare formează o bază în R^3. A rezolva sistemul înseamnă, în baza relațiilor (4) să determinăm coeficienții x_1, x_2, x_3 ai combinației liniare unice de vectori a_1, a_2, a_3 care coincide cu vectorul b. Metoda eliminării complete constă în eliminarea treptată a primei, a doua , a treia etc. necunoscute în toate ecuațiile sistemului în afară de prima, a doua, a treia etc., ecuație respectiv. Pentru sistemul dat primul pas constă în eliminarea primei necunoscute x_1 din toate ecuațiile în afară de prima, ceea ce se poate face adunând prima ecuație înmulțită cu un număr convenabil ales la a doua și a treia ecuație.

Pasul 1.

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ x_2 & &= 6 \\ 4x_1 &+ x_2 & &= 9 \\ 5x_1 &+ 2x_2 & &= 11 \end{aligned}$$

Întrucât matricea A este nesingulară, sistemul dat poate fi scris astfel încât coeficientul primei necunoscute în prima ecuație să fie diferit de zero. Acest lucru se realizează printr-o nouă renumerotare a ecuațiilor sistemului.

Mai mult, acest coeficient poate fi făcut egal cu 1 așa cum este în cazul nostru, îmărțind prima ecuație la $a_{11} = 3$. Sistemul se scrie:

$$\begin{aligned} x_1 &+ \frac{1}{3}x_2 & & &= 2 \\ 4x_1 &+ x_2 &+ x_3 & &= 9 \\ 5x_1 &+ 2x_2 &+ x_3 & &= 11 \end{aligned}$$

Pentru eliminarea necunoscutei x_1 din a doua ecuație înmulțim prima ecuație cu -4 și o adunăm la a doua, iar pentru a elimian pe x_1 din a treia ecuație înmulțim prima ecuație cu -5 și o adunăm la a treia. Obținem:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{3}x_2 \quad\quad &= 2 \\ -\frac{1}{3}x_2 + x_3 &= 1 \\ \frac{1}{3}x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Pasul 2. Eliminăm acum a doua necunoscută x_2 din ecuațiile 1 și 3 în afară de ecuația a doua, înmulțind în prealabil ecuația a doua cu –3 pentru a face coeficientul lui x_2 egal cu 1. Sistemul precedent devine:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{3}x_2 \quad\quad &= 2 \\ x_2 - 3x_3 &= -3 \\ \frac{1}{3}x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Inmulțim ecuația a doua cu $-\frac{1}{3}$ și o adunăm la prima respectiv a doua ecuație.

Obținem:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 3 \\ x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Pasul 3. Împărțim ecuația trei cu 2 și apoi o înmulțim cu 3 respectiv cu –1 și o adunăm la prima, respectiv la a doua. Obținem:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

care este sistemul transformat în care eliminarea necunoscutelor x_1, x_2, x_3 în modul indicat mai sus este completă și care dă soluția căutată.

Procedeul eliminării complete expus, mai poate fi prezentat și în modul următor:

Scrim matricea sistemului și coloana termenilor liberi

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 11 \end{array}$$

Se alege un element numit *pivot* de exemplu 3 (trebuie să fie nenul). Elementele matricii după etapa 1 se calculează astfel:

- linia pivotului se împarte la pivot

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \;\Big|\; 2$$

- coloana pivotului are elemente 0 în afară de elementul de pe locul pivotului care este 1. Celelalte elemente se calculează cu așa numita *regulă a dreptunghiului.* De exemplu, pentru elementul de pe locul (2,2) se alcătuiește un dreptunghi care are într-un vârf pivotul iar în vârful opus numărul de pe locul (2,2) în cazul nostru 1 și celelalte vârfuri ale dreptunghiului sunt elementele matricii A de pe locurile (1,2) și (2,1). Astfel dreptunghiul este:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Se calculează valoarea ca un determinant de ordinul doi cu mențiunea că produsul de pe diagonala pivotului se ia întotdeauna cu semnul +; Deci avem:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = -1$$

Rezultatul se împarte la pivot și se trece pe locul (2,2) în pasul următor:

$$\left| \begin{matrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & ? \\ 0 & & \end{matrix} \right|^{2}$$

Pentru calculul elementului de pe locul (2,3) se alege dreptunghiul

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ și se împarte la pivot, adică } \frac{3}{3} = 1$$

Procedând analog cu toate elementele care nu fac parte din linia sau coloana pivotului inclusiv elementele termenului liber, se obține etapa a doua.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{array}\right.$$

Pentru etapa a treia alegem un alt pivot (nu de pe linia 1 și care să fie neapărat nenul) de exemplu $-\frac{1}{3}$; Procedând exact ca mai înainte, vom ilustra numai calculul elementului de pe locul (1,3)

$$\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = 1$$

Astfel etapa a treia este:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right.$$

În sfârșit ultimul pivot poate fi luat 2 și soluția este dată de etapa a patra

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

Soluția este deci $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Foarte adesea este nevoie nu numai să rezolvăm sistemul ci să aflăm și matricea inversă A^{-1} a matricii A a sistemului. În acest scop scriem la dreapta matricii A matricea unitate I de ordin n și aplicăm metoda eliminării complete matricii extinse.

Matricea inversă se obține pe locul ocupat mai înainte de matricea unitate. Dacă avem matricea extinsă:

$$(A \mid I \mid b)$$

și aplicăm schema de calcul a soluției sistemului prim metoda eliminării complete obținem:

$$\left(A^{-1}A \;\middle|\; A^{-1}I \;\middle|\; A^{-1}b\right)$$

sau

$$I \;\Big|\; A^{-1} \;\Big|\; X$$

Prin urmare după cele trei iterații ale metodei eliminării complete matricea A a sistemului se transformă în matricea unitate, matricea unitate în matricea inversă A^{-1} a matricii A iar vectorul b se transformă în soluția X a sistemului .

Reluând exemplul precedent vom scrie

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc|c} & A & & & I & & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \end{array}$$

Pasul 1
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pasul 2
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Pasul 3
$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc|ccc|c} & I & & & A^{-1} & & X \end{array} \end{array}$$

Deducem deci:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Deci combinația liniară unică prin care se exprimă vectorul b este:

$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 2a_1 + 0a_2 + 1a_3 = b$

Întrucât vectori a_1, a_2, a_3 formează o bază în R^3, orice alt vector al acestui spațiu se poate exprima în mod unic ca o combinație liniară a acestor vectori. Fie acest vector a_4 și y_1, y_2, y_3 componentele lui în baza a_1, a_2, a_3. Atunci

$$y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3 = a_4$$

sau

$$AY = a_4$$

de unde pentru a afla Y este suficient să înmulțim relația precedentă cu A^{-1} la stânga:

$$A^{-1}AY = A^{-1}a_4; \quad Y = A^{-1}a_4$$

Fie de exemplu în baza unitară vectorul:

$$a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

atunci avem:

$$Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Deci $\quad -a_1 + 7a_2 - 5a_3 = a_4$

iar componentele vectorului a_4 în baza $\{a_1, a_2, a_3\}$ sunt $y_1 = -1,\ y_2 = 7$, $y_3 = -5$

6. Mulţimi convexe în R^n.

Fie spaţiul liniar R^n :

$R^n = \{a = (\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n | \alpha_i \in R, i = 1,2,...n\}$

Elementele $a = (\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ ale lui R^n le-am numit *vectori n-dimensionali* sau *puncte* ale spaţiului *n*-dimensional R^n. Folosirea denumirii de punct în locul denumirii de vector înlesneşte înţelegerea unor noţiuni ce urmează să fie definite cu ajutorul unor consideraţii geometrice.

Deci când vom vorbi de mulţimi de elemente (vectori) din R^n, vom spune mulţimi de puncte din R^n.

Menţionăm că la definirea unor elemente geometrice punctele din R^n, vor mai fi notate şi cu $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, x_i $1 \leq i \leq n$ fiind coordonatele carteziene ale punctului $X \in R^n$.

Prin urmare, segmentul determinat de punctele a_1 şi a_2 în R^n este mulţimea vectorilor a de forma:

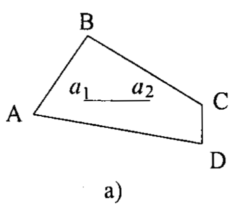
$a = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

Pentru $n \leq 3$ această noţiune coincide cu ce obişnită.

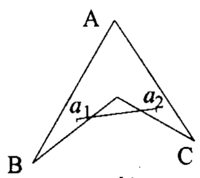
Definiţie: Mulţimea $\mathcal{C} \subset R^n$ de puncte din R^n se numeşte *convexă* dacă pentru oricare două puncte $a_1, a_2 \in \mathcal{C}$, segmentul determinat de aceastea este conţinut în mulţimea $\mathcal{C}$ adică a,fiind un punct oarecare al segmentului, are loc apartenenţa

$a = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2 \in \mathcal{C}, \; 0 \leq \lambda \leq 1$.

În figurile de mai jos a fost reprezentate o mulţime convexă a) şi una neconvexă b) în R^n.



a)



b)

Definiţie: Un punct $a \in \mathcal{C} \subset R^n$ se numeşte *punct extrem* sau *punct vârf* al mulţimii convexe $\mathcal{C}$ dacă nu există în $\mathcal{C}$ nici o pereche de puncte a_1 şi a_2 astfel încât

$$a = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2 \;, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

adică să fie o combinaţie liniară convexă a lor.