

**MATEMATICĂ  
PENTRU  
MODELARE ECONOMICĂ**

**TATIANA CORINA DOESCU**

**MATEMATICĂ  
PENTRU  
MODELARE ECONOMICĂ**



**EDITURA UNIVERSITARĂ**  
**București, 2011**

Tehnoredactare computerizată: Ameluța Vișan  
Coperta: Angelica Mălăescu

Copyright © 2011  
Editura Universitară  
Director: Drd. Vasile Muscalu  
B-dul. N. Bălcescu nr. 27-33, Sector 1, București  
Tel.: 021 – 315.32.47 / 319.67.27  
www.editurauniversitara.ro  
e-mail: redactia@editurauniversitara.ro

EDITURĂ RECUNOSCUTĂ DE CONSILIUL NAȚIONAL AL CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE  
(C.N.C.S.)

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**  
**DOSESCU, TATIANA CORINA**

**Matematică pentru modelare economică** / Tatiana Corina Dosescu.  
- București : Editura Universitară, 2011-  
2 vol.  
ISBN 978-606-591-308-0  
**Vol. 1. : Matematica pentru modelare economică. - 2011. –**  
Bibliogr. - ISBN 978-606-591-307-3

51-7:33

© Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate autorului.

Distribuție: tel.: 021-315.32.47 /319.67.27,  
comenzi@editurauniversitara.ro

ISBN 978-606-591-307-3

DOI: 10.5682/9786065913073

## CUPRINS

Preambul .....	9
Capitolul 1. NOȚIUNI PRIVIND MODELAREA ȘTIINȚIFICĂ .....	11
1.1 Model, modelare.....	11
1.2 O definiție a modelului în știință.....	11
1.3 O clasificare a modelelor în știință .....	13
1.4 Modelare matematică, model matematic .....	14
1.5 Modelare economică, model economic .....	15
1.6 Modelarea economico-matematică, model economico-matematic.....	16
1.7 O clasificare a modelelor economico-matematice .....	17
Capitolul 2. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ .....	18
2.1 Noțiuni elementare ale algebrei liniare .....	18
2.2 Combinația liniară de vectori .....	20
2.3 Vectori liniari independenți. Vectori liniari dependenți .....	21
2.4 Caracterizări ale vectorilor liniari dependenți.....	22
2.5 Sisteme de generatori .....	23
2.6 Bază a unui spațiu vectorial .....	24
2.7 Spații vectoriale finit dimensionale (de tip finit) .....	24
2.8 Trecerea de la o bază la alta .....	26
2.9 Metoda Gauss – Jordan .....	29
2.10 Subspații liniare .....	36
2.11 Funcționale liniare și funcționale biliniare.....	38
2.12 Funcționale pătratice. Reducerea la forma canonică .....	43
2.13 Probleme rezolvate .....	49
2.14 Probleme propuse .....	64
Capitolul 3. ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ .....	68
3.1 Tipuri de probleme de programare liniară .....	68
3.1.1 Organizarea optimă a producției.....	68
3.1.2 Planificarea optimă a consumului de materii prime .....	70
3.2 Diverse forme ale modelului matematic .....	72
3.2.1 Forma generală .....	72
3.2.2 Forma canonică.....	73
3.2.3 Forma standard .....	73
3.3 Soluțiile unei probleme de programare liniară.....	75
3.4 Metoda grafică pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară .....	83
3.5 Algoritmul simplex primal .....	85
3.6 Etapele algoritmului simplex primal .....	92
3.7 Convergența algoritmului simplex primal. Degenerare. Ciclare .....	98

3.8	Metoda penalizării (metoda bazei artificiale) .....	100
3.9	Dualitatea în programare liniară.....	106
3.10	Teorema de dualitate .....	108
3.11	Problema transporturilor (a distribuitorilor) .....	112
3.12	Metode pentru determinarea unei soluții posibile de bază, inițiale .....	117
3.13	Metoda potențialelor pentru determinarea unei soluții optime .....	122
3.14	Probleme rezolvate .....	126
3.15	Probleme propuse .....	138
Capitolul 4. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ ȘI APLICAȚII.....		141
4.1	Relație binară și relație de echivalență .....	141
4.2	Cardinalul unei mulțimi .....	143
4.3	Mulțimi numărabile și mulțimi nenumărabile .....	144
4.4	Relație de ordine. Mulțimi ordonate .....	144
4.5	Element maxim, element minim .....	145
4.6	Margine superioară, margine inferioară .....	146
4.7	Mulțimi mărginite în $R$ .....	147
4.8	Șiruri numerice .....	147
4.9	Serii numerice .....	150
4.10	Serii alternate .....	153
4.11	Serii absolut convergente .....	154
4.12	Serii cu termeni pozitivi .....	154
4.13	Exerciții propuse .....	159
4.14	Șiruri de funcții reale .....	163
4.15	Convergența simplă, convergența uniformă .....	164
4.16	Criterii de convergență uniformă .....	165
4.17	Proprietăți ale șirurilor de funcții uniform convergente .....	166
4.18	Serii de funcții reale .....	169
4.19	Operații cu serii de funcții .....	172
4.20	Restul unei serii de funcții .....	172
4.21	Criterii de convergență uniformă .....	172
4.22	Proprietăți ale seriilor de funcții uniform convergente .....	174
4.23	Serii de puteri .....	176
4.24	Proprietăți ale seriilor de puteri .....	180
4.25	Serii Taylor .....	181
4.26	Formula lui Taylor .....	182
4.27	Dezvoltare limitată de ordinul $n$ .....	183
4.28	Dezvoltări în serie .....	185
4.29	Exerciții propuse .....	187
4.30	Topologie. Spațiu topologic .....	193
4.31	Mulțimi deschise .....	194
4.32	Mulțimi închise .....	195
4.33	Mulțimi compacte .....	197

4.34	Funcții continue pe spații topologice .....	198
4.35	Proprietăți ale funcțiilor continue pe mulțimi compacte .....	198
4.36	Normă. Spații normate .....	199
4.37	Exerciții propuse .....	200
4.38	Șir convergent în $(V, T)$ .....	202
4.39	Funcții vectoriale de variabilă vectorială .....	203
4.40	Limita unei funcții vectoriale de variabilă vectorială .....	204
4.41	Limite iterate .....	204
4.42	Funcții parțiale. Continuitate parțială .....	205
4.43	Derivate parțiale .....	206
4.44	Aplicație în modelarea microeconomică a utilității bunurilor .....	208
4.45	Derivate parțiale de ordin superior .....	208
4.46	Aplicație la modelarea utilității .....	209
4.47	Criteriul lui Schwarz .....	209
4.48	Diferențiabilitate .....	212
4.49	Diferențială .....	213
4.50	Diferențiala și derivatele parțiale ale funcțiilor compuse .....	216
4.51	Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile reale .....	217
4.52	Extremele funcțiilor de mai multe variabile .....	218
4.53	Algoritmul pentru determinarea punctelor de extrem local .....	222
4.54	Algoritmul pentru determinarea punctelor de extrem local (cazul general) .....	224
4.55	Aplicații în modelarea microeconomică .....	225
4.56	Metoda celor mai mici pătrate .....	226
4.57	Funcții implicite .....	229
4.58	Sisteme de funcții implicite .....	231
4.59	Transformări regulate .....	233
4.60	Dependență funcțională .....	234
4.61	Extreme cu legături .....	236
4.62	Exerciții propuse .....	238
4.63	Generalizarea integralei Riemann pe intervale necompacte (integrale generalizate) .....	257
4.64	Criterii de convergență .....	260
4.65	Integrale cu parametru pe interval compact .....	261
4.66	Integrale cu parametru pe interval necompact .....	263
4.67	Integrale euleriene (funcții speciale) .....	264
4.68	Integrala dublă .....	270
4.69	Calculul integralei duble .....	274
4.70	Schimbarea de variabile la integrala dublă .....	277
4.71	Exerciții propuse .....	279
	BIBLIOGRAFIE .....	286

## Preambul

Modelarea economică este o îndeletnicire a celor calificați în a prelucra informația din domeniul economic, în vederea sporirii eficienței, a valorii adăugate, a fundamentării actului de decizie și realizării multor altor obiective.

Complexitatea fenomenelor economice necesită completarea modelării economice, ce are drept rezultat modelul economic, cu o modelare matematică al cărei produs este modelul economico-matematic, capabil de a oferi soluții problemelor de optimizare, de strategie, de previziune sau a celor care iau în considerare factorii aleatori prezenți în economia reală.

Acest volum se adresează studenților sau masteranzilor economiști, a căror pregătire profesională presupune formarea de abilități în domeniul analizei și prelucrării informației de tip cantitativ, calitativ sau mixt, obiectiv care nu poate fi atins fără acumularea de cunoștințe matematice și însușirea deprinderii de a utiliza algoritmi și metode matematice, din ce în ce mai avansate.

Conținutul acestei lucrări se constituie într-o primă ofertă a capitolelor de matematică, necesare unei solide pregătiri a studenților economiști, pentru a fi capabili să rezolve problemele curente ale practicii economice.

Volumul conține patru capitole: „NOȚIUNI PRIVIND MODELAREA ȘTIINȚIFICĂ”, „ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ”, „ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ” și „ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ ȘI APLICAȚII”. În primul capitol este prezentată o definiție a modelului și modelării științifice, urmată de clasificări ale modelelor. În capitolul doi se expun noțiunile ale algebrei liniare necesare capitolului 3 în care sunt expuse rezultatele teoretice fundamentale necesare unei modelări economice, în care predomină abordarea de tip liniar sau proporțional a fenomenului economic, iar conținutul celui de al patrulea capitol se referă la aparatul creat de analiza matematică destinat modelării în care abordarea deterministă de tip funcțional este dominantă. Cele patru capitole se încadrează în tematica, devenită clasică, proprie unei programe analitice a oricărei facultăți cu profil economic.

Modul de prezentare al conținutului celor două capitole se străduiește să îmbine exactitatea matematică cu accesibilitatea, fără a se face rabat de la rigoarea caracteristică oricărei abordări științifice.

Această carte este începutul unei serii de lucrări al căror țel este furnizarea de metode și modele matematice, care să contribuie la o pregătire temeinică a viitorilor specialiști în domeniul economic.